No. Date 20/03/19

# ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

**Άσκηση 1** $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ $e^A=;$

$\chi_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 4 & 3-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda)-2\cdot 4=\lambda^2-4\lambda+3-8=$

$=\lambda^2-4\lambda-5$ $\Delta=36$ $\lambda_1=5$ ή $\lambda_2=-1$

• $V(5)$: $\begin{pmatrix}1-5 & 2\\ 4 & 4-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-4x+2y=0\\ 4x-2y=0\end{cases}\Rightarrow y=2x$

άρα $V(5)=\langle(1,2)\rangle$

• $V(-1)$: $\begin{pmatrix}1-(-1) & 2\\ 4 & 4-(-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x+2y=0\\ 4x+4y=0\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow x=-y$ άρα $V(-1)=\langle(-1,1)\rangle$

$A=P\Lambda P^{-1}$ με $P=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $P^{-1}=;$

$e^A=I+A+\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{3}+\dots\Rightarrow e^A=P\left(I+\Lambda+\frac{\Lambda^2}{2}+\frac{\Lambda^3}{3}+\dots\right)P^{-1}$

Άρα $e^A=P\cdot\begin{pmatrix}e^5 & 0\\ 0 & e^{-1}\end{pmatrix}\cdot P^{-1}$

**Άσκηση 2**:

ευκλείδιος χώρος $u,v\in E$ ώστε $\|u+v\|=\|u\|+\|v\|\Rightarrow$

$\Rightarrow\|u+v\|^2=(\|u\|+\|v\|)^2\Rightarrow\langle u+v,u+v\rangle=\|u\|^2+2\|u\|\cdot\|v\|+\|v\|^2$

$\Rightarrow\langle u,u\rangle+\langle v,u\rangle+\langle v,v\rangle+\langle u,v\rangle=\|u\|^2+2\|u\|\cdot\|v\|+\|v\|^2$

$\Rightarrow\cancel{\|u\|^2}+2\langle u,v\rangle+\cancel{\|v\|^2}=\cancel{\|u\|^2}+2\|u\|\cdot\|v\|+\cancel{\|v\|^2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}=1\Rightarrow\cos\phi=1\Rightarrow\phi=0\Rightarrow u$ ή $v$ γραμμικά εξαρτημένα.

$\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2\Rightarrow\langle u+v,u+v\rangle=\|u\|^2+\|v\|^2\Rightarrow$

$\Rightarrow\cancel{\|u\|^2}+2\langle u,v\rangle+\cancel{\|v\|^2}=\cancel{\|u\|^2}+\cancel{\|v\|^2}\Rightarrow\langle u,v\rangle=0\Rightarrow\cos\phi=0\Rightarrow\phi=\frac{\pi}{2}$ rad

Άσκηση 3: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = 2a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + 5a_2b_2 =$$

$$= (a_1, a_2) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Άρα ισχύουν οι ιδιότητες 1, 2, 3 κ' 4.

4η ιδιότητα: $\langle (a_1, a_2), (a_1, a_2) \rangle \geq 0$

$$2a_1^2 - 2a_1a_2 - 2a_2a_1 + 5a_2^2 = 2a_1^2 - 4a_1a_2 + 5a_2^2 =$$

$$= 2(a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2) + 3a_2^2 = 2(a_1 - a_2)^2 + 3a_2^2 \geq 0$$

$$\|(1,0)\| = \sqrt{\langle (1,0) \rangle, \langle (1,0) \rangle} = \sqrt{2}$$

$$\|(0,1)\| = \sqrt{\langle (0,1) \rangle, \langle (0,1) \rangle} = \sqrt{5}$$

$$\|(a_1, a_2)\| = 1 \Leftrightarrow 2(a_1 - a_2)^2 + 3a_2^2 = 1$$

$\downarrow$

Κύκλος στο συγκεκριμένο εσωτερικό γινόμενο, αλλά όχι κύκλος στο κανονικό εσωτερικό γινόμενο (έλλειψη)

# Διαδικασία Gram-Schmidt

Μετατρέπει ένα γραμμ. ανεξάρτητο υποσύνολο $\{u_1, \dots, u_k\}$ σε ορθογώνιο $\{v_1, \dots, v_k\}$ χρησιμοποιώντας τα $\{u_1, \dots, u_k\}$

Ορίζω $v_1 = u_1$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \qquad v_2 \perp v_1$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \qquad v_3 \perp v_2 \text{ κ' } v_1$$

$$v_k = u_k - \frac{\langle u_k, v_{k-1} \rangle}{\langle v_{k-1}, v_{k-1} \rangle} v_{k-1} - \dots - \frac{\langle u_k, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \qquad v_k \perp v_{k-1} \text{ κ' } v_{k-2}, \dots, v_1$$

από το γρ. ανεξ. $\{u_1, \dots, u_k\}$ φθάνουμε στο ορθ. $\{v_1, \dots, v_k\}$
αν θέλουμε μπορούμε να το κάνουμε κ' κανονικό.

$$\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots, \frac{v_k}{\|v_k\|} \right\}$$

**πχ: 1)** Στο χώρο $\mathbb{R}_2[x]$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ να μετατραπεί το σύνολο $\{\underset{u_1}{1}, \underset{u_2}{x}, \underset{u_3}{x^2}\}$ σε ορθοκανονικό

$$v_1 = 1 \quad , \quad v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = x - \frac{\int_0^1 x dx}{\int_0^1 1 \cdot dx} \cdot 1 =$$

$$= x - \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot 1 = x - \frac{1}{2}$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 =$$

$$= x^2 - \frac{\int_0^1 x^2 (x - \frac{1}{2}) dx}{\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx} (x - \tfrac{1}{2}) - \frac{\int_0^1 x^2 dx}{1} \cdot 1 =$$

$$= x^2 - \frac{\int_0^1 (x^3 - \frac{x^2}{2}) dx}{\int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{4}) dx} (x - \tfrac{1}{2}) - \frac{1}{3} =$$

$$= x^2 - \frac{3/4 - 1/6}{1/3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} (x - \tfrac{1}{2}) - \frac{1}{3} = x^2 - \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}} (x - \tfrac{1}{2}) - \frac{1}{3} =$$

$$= x^2 - x + \frac{1}{6}$$

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Έστω $E$ ευκλείδιος χώρος κ' $V$ υπόχωρος του $E$ κ' $u \in E$. Θα λέμε ότι το $u$ είναι <u>κάθετο</u> στον $V$ κ' συμβολίζω <u>$u \perp V$</u> αν είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα του $V$.
Αν $V$ κ' $W$ είναι υπόχωροι του $E$ θα λέμε ότι ο $V$ είναι κάθετος στον $W$ $(V \perp W)$ αν κάθε διάνυσμα του $V$ είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα του $W$. Αν $V$ υπόχωρος του $E$ τότε ο υπόχωρος $W$ καλείται <u>ορθογώνιο συμπλήρωμα</u> του $V$ αν ισχύουν: α) $V \oplus W = E$

β) $V \perp W$

**Πχ 1)** Δίνεται ο $\mathbb{R}^3$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο, ο $V = \{(x,y,z) \text{ με } x+y=0\}$ κ' το $u=(1,3,0)$. Να εξεταστεί αν $u \perp V$.

$x+y=0 \Rightarrow x=-y$ $\qquad V: (x,y,z) = (-y,y,z) = y(-1,1,0)+z(0,0,1)$

Άρα $V = \langle (-1,1,0),(0,0,1) \rangle$

Για να είναι $u \perp V$ αρκεί $u \perp (-1,1,0)$ κ' $u \perp (0,0,1)$

γιατί: έστω $\alpha(-1,1,0)+\beta(0,0,1)$ τυχαίο διάνυσμα του $V$

Πρέπει νδο $u \perp \alpha(-1,1,0)+\beta(0,0,1) \Leftrightarrow \langle u, \alpha(-1,1,0)+\beta(0,0,1) \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \alpha \underbrace{\langle u,(-1,1,0) \rangle}_{0 \text{ γιατί } u \perp (-1,1,0)} + \beta \underbrace{\langle u,(0,0,1) \rangle}_{0 \text{ γιατί } u \perp (0,0,1)} = 0$ ισχύει.

$\langle u,(-1,1,0) \rangle = \langle (1,3,0),(-1,1,0) \rangle \neq 0$

Άρα $u \not\perp V$ αλλά το $v=(\kappa,\kappa,0) \perp V$

**2)** Νδο $V = \{(x,-x,z) \mid x,z \in \mathbb{R}\} \perp W = \{(x,x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο κ' να βρεθούν τα ορθογώνια συμπληρώματα των $V$ κ' $W$.

No. Date

$V = \langle (1,-1,0), (0,0,1) \rangle$ $\qquad V^\perp$

$W = \langle (1,1,0)$ $\qquad W^\perp$

Επειδή $(1,1,0) \perp (1,-1,0)$ κ $(0,0,1)$ έχω ότι $V \perp W$

Το ορθογώνιο συμπλήρωμα ενός υποχώρου συμβολίζεται με $V^\perp$

$u_1 = (1,-1,0)$ $\quad u_2 = (0,0,1)$ $\quad u_3 = (1,0,0)$ $\qquad \dim V^\perp = 1$

Επειδή $\{u_1, u_2, u_3\}$ γραμ. ανεξ. η διαδικασία G-S θα τα κάνει κ $\perp$

$v_1 = u_1 = (1,-1,0)$

$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1 = (0,0,1) - 0 = (0,0,1)$

$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} \cdot v_2 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1 = \ldots\ldots$

$= (1,0,0) - 0(0,0,1) - \frac{1}{2}(1,-1,0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

$V = \langle (1,-1,0), (0,0,1) \rangle$ $\qquad V^\perp = \langle (1,1,0) \rangle$

θέλω $W^\perp$. $\quad u_1 = (1,1,0)$ $\quad u_2 = (1,0,0)$, $\quad u_3 = (0,0,1)$

$\dim W^\perp = 2$

$v_1 = u_1 = (1,1,0)$

$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = (1,0,0) - \frac{1}{2}(1,1,0) = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0)$

$v_3 = u_3 - \cancel{\frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle}}^{0} v_2 - \cancel{\frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}}^{0} v_1 = (0,0,1) - 0 - 0 = (0,0,1)$

$W^\perp = \langle (1,-1,0), (0,0,1) \rangle$

**3)** Στον ευκλείδιο χώρο $P_2[x]$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$ να βρεθεί η προβολή $h(x) = x^2 + 1$ στον υπόχωρο που γεννάται από τα πολυώνυμα $x^2$ κ $x$.

$V = \langle x^2, x \rangle$. $\quad$ προβ$_V(h(x))$. Εξετάζω αν $\langle x^2, x \rangle = 0$

$\int_0^1 x^2 \cdot x \, dx = \frac{1}{4} \neq 0$

Θα τα κάνω ορθογώνια με G-S:

No. Date

$v_1 = x^2$

$v_2 = x - \frac{\langle x, x^2\rangle}{\langle x^2, x^2\rangle} x^2 = x - \frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 x^4 dx} x^2 = x - \frac{5}{4}x^2$

$V = \langle x^2, x - \frac{5}{4}x^2 \rangle$

$\text{προβ}_V (h(x)) = \frac{\langle x^2+1, x^2\rangle}{\langle x^2, x^2\rangle} \cdot x^2 + \frac{\langle x^2+1, x - 5/4 \cdot x^2\rangle}{\langle x - \frac{5}{4}x^2, x - \frac{5}{4}x^2\rangle} =$

$= \frac{\int_0^1 (x^4+x^2)dx}{\frac{1}{5}} \cdot x^2 + \frac{\int_0^1 (x^3 + x - \frac{5}{4}x^4 - \frac{5x^2}{4})dx}{\int_0^1 (x^2 + \frac{25}{16}x^4 - \frac{5x^3}{2})dx} \cdot (x - \frac{5}{4}x^2) =$

$= \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{5}} \cdot x^2 + \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{5}{12}}{\frac{10}{3} + \frac{5}{16} - \frac{5}{8}} (x - \frac{5}{4}x^2) = \dots$

4) Να βρεθεί το α ώστε το $x^2+\alpha$ κ το $x+1$ να έχουν ελάχιστη απόσταση

ελάχιστο: $\|x^2+\alpha-(x+1)\|^2 = \|x^2+\alpha-x-1\|^2$

$\langle (x^2+\alpha-x-1), (x^2+\alpha-x-1)\rangle = \int_0^1 (x^2+\alpha-x-1)^2 dx =$

$= \int_0^1 (x^4+\alpha^2+x^2+1+2x^2\alpha - 2x^3 + 2x^2 - 2\alpha x - 2\alpha + 2x)dx =$

$= \frac{1}{5} + \alpha^2 + \frac{1}{3} + 1 + \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \alpha - 2\alpha + 1 =$

$= \alpha^2 - \frac{7}{3}\alpha + \frac{23}{5}$

Έστω $\phi(\alpha) = \alpha^2 - \frac{7}{3}\alpha + \frac{23}{5}$ $\phi''(\alpha) = 2$ άρα $\phi'(\alpha) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\alpha - \frac{7}{3} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{7}{6}$

• **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Έστω $\{u_1, \dots, u_k\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο ενός ευκλείδιου χώρου E.

1) Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση του υποχώρου που γεννάται από το $\{u_1, \dots, u_k\}$

2) Ο υπόχωρος $V = \langle u_1, \dots, u_k\rangle$ έχει ορθ. συμπλήρωμα

3) Αν το $\{u_1, \dots, u_k\}$ είναι βάση τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση

No. Date

* Απόδειξη: 1) Εφαρμόζω τη διαδικασία G-S στο $\{u_1, \dots, u_k\}$

2) Το ίδιο ακριβώς

3) Επεκτείνω τη βάση του $V$ σε βάση $E$:

$\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$. Ο υπόχωρος $<u_{k+1}, \dots, u_n>$ αποτελεί ευθύ συμπλήρωμα του $V$. Εφαρμόζω G-S στο $\{u_1, \dots, u_n\}$ κ λαμβάνω το $\{v_1, \dots, v_n\}$. Ο ζητούμενος χώρος $V^{\perp}$ δίνεται από $<v_{k+1}, \dots, v_n>$